

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО
Директор Высшей школы
современной математики
А.Н. Соболевский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Случайные процессы и поля
по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика
	Высшая школа современной математики
	Высшая школа современной математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 54 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 144, всего зач. ед.: 4

Программу составил: А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

Аннотация

Курс содержит основы теории случайных процессов. Рассматриваются марковские процессы, стационарные процессы (включая спектральную теорию процессов, стационарных в широком смысле), диффузионные процессы и интеграл Ито, случайные поля.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение основ теории случайных процессов и полей для дальнейшего использования в других математических дисциплинах аналитического цикла; формирование математической культуры, исследовательских навыков. в том числе для решения вычислительных задач, и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области математического анализа;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в соотнесении результатов математического анализа с контекстом других математических дисциплин

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основные понятия теории случайных процессов и полей (в том числе стационарных и марковских случайных процессов, процесса Винера и диффузионных процессов, пуассоновских случайных полей).

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с марковскими, стационарными и др. случайными процессами.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Броуновское движение.	2	2		3
2	Две теоремы А. Н. Колмогорова.	2	2		3
3	Марковские процессы со счетным множеством состояний.	2	2		3
4	Стационарное распределение марковского процесса.	2	2		3
5	Стационарные процессы и спектры.	2	2		3
6	Обобщенные случайные процессы.	2	2		3
7	Прогнозирование случайного процесса.	2	2		4
8	Стационарные процессы и эргодическая теорема.	2	2		4
9	Мартингалы.	2	2		4
10	Марковские процессы.	2	2		4
11	Диффузионные процессы и стохастический интеграл.	2	2		4
12	Стохастические дифференциальные уравнения.	2	2		4
13	Пуассоновские случайные поля.	6	6		12
Итого часов		30	30		54
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		144 час., 4 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Броуновское движение.

Броуновское движение.
Свойства его траекторий.

2. Две теоремы А. Н. Колмогорова.

Теорема Колмогорова о существовании процесса.
Примеры.
Теорема Колмогорова о непрерывной модификации.

3. Марковские процессы со счетным множеством состояний.

Марковские процессы со счетным множеством состояний.
Уравнения Колмогорова.

4. Стационарное распределение марковского процесса.

Стационарное распределение марковского процесса.
Эргодическая теорема.
Условие Деблина.
Пуассоновский процесс.
Процессы массового обслуживания.

5. Стационарные процессы и спектры.

Стационарные в широком смысле процессы.
Эргодическая теорема фон Неймана.
Спектральное представление.
Теоремы Герглотца и Бохнера-Хинчина.

6. Обобщенные случайные процессы.

Обобщенные случайные процессы.
Белый шум.

7. Прогнозирование случайного процесса.

Задача линейного прогнозирования.
Теорема Сеге.

8. Стационарные процессы и эргодическая теорема.

Стационарные в узком смысле процессы.
Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина.

9. Мартингалы.

Мартингалы.
Неравенство Дуба.
Теорема о сходимости.
Разложение Дуба-Мейера.

10. Марковские процессы.

Марковские процессы.
Свойство Феллера.
Строгое марковское свойство броуновского движения.
Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

11. Диффузионные процессы и стохастический интеграл.

Диффузионные процессы.
Уравнения Колмогорова.
Уравнение теплопроводности и броуновское движение.
Процесс Орнштейна-Уленбека.
Стохастический интеграл.
Формула Ито.

12. Стохастические дифференциальные уравнения.

Примеры.
Нахождение решений при помощи формулы Ито.
Теорема существования и единственности для стохастических дифференциальных уравнений.

13. Пуассоновские случайные поля.

Пуассоновские случайные поля.
Гиббсовские случайные поля.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Теория случайных процессов [Текст] / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев .— М. : Физматлит, 2003 .— 400 с.

Дополнительная литература

1. Вероятность [Текст] : в 2 кн. Кн. 2 : Суммы и последовательности случайных величин - стационарные, мартингалы, марковские цепи / А. Н. Ширяев - М.Изд-во МЦНМО,2017

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://old.mccme.ru/iur/courses.php>
<https://library.mccme.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Математика
профиль подготовки: Фундаментальная математика
Высшая школа современной математики
Высшая школа современной математики
курс: 3
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Экзамен

Разработчик: А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Случайные процессы и поля» обучающийся должен:

знать:

Основные понятия теории случайных процессов и полей (в том числе стационарных и марковских случайных процессов, процесса Винера и диффузионных процессов, пуассоновских случайных полей).

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с марковскими, стационарными и др. случайными процессами.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Броуновское движение. Свойства его траекторий
2. Теорема Колмогорова о существовании процесса. Примеры. Теорема Колмогорова о непрерывной модификации
3. Марковские процессы со счетным множеством состояний. Уравнения Колмогорова
4. Стационарное распределение марковского процесса. Эргодическая теорема. Условие Деблина. Пуассоновский процесс. Процессы массового обслуживания
5. Стационарные в широком смысле процессы. Эргодическая теорема фон Неймана. Спектральное представление. Теоремы Герглота и Бохнера-Хинчина
6. Обобщенные случайные процессы. Белый шум
7. Задача линейного прогнозирования и теорема Сеге
8. Стационарные в узком смысле процессы. Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина
9. Мартингалы. Неравенство Дуба. Теорема о сходимости. Разложение Дуба-Мейера
10. Марковские процессы. Свойство Феллера. Строгое марковское свойство броуновского движения. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа
11. Диффузионные процессы. Уравнения Колмогорова. Уравнение теплопроводности и броуновское движение. Процесс Орнштейна-Уленбека. Стохастический интеграл. Формула Ито
12. Теорема существования и единственности для стохастических дифференциальных уравнений
13. Пуассоновские случайные поля
14. Гиббсовские случайные поля

Пример экзаменационного билета:

- 1) Белый шум как обобщенный случайный процесс.
- 2) Формула Ито.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 40 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на устном экзамене не может продолжаться более двух астрономических часов.

Во время проведения экзамена обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору экзаменатора.